EXERCICES CORRIGES VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

EXERCICE 1 : Un jeu consiste à lancer un dé non pipé

- si le joueur obtient un 1, il perd 30 €
- si le joueur obtient un 2, il perd 20 €
- si le joueur obtient un 3, il perd 10 €
- si le joueur obtient un 4, il ne perd ni ne gagne rien
- si le joueur obtient un 5 ou un 6, il gagne 30 €

1) Soit X la variable aléatoire indiquant le gain (positif ou négatif) du joueur. Donner la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance.

EXERCICE 2 : Un enfant lance simultanément trois pièces de monnaie de 1€, 2 € et 5 €. Il totalise les francs des pièces qui présentent le côté face.
Soit X la variable aléatoire comptant ce total en euros :

1) donner la loi de probabilité de X
2) calculer $p(X \leq 2)$ et $p(X > 6)$
3) calculer $E(X)$

conseil : pour le 1) , on pourra s'aider d'un arbre

EXERCICE 3: dans une urne, il y a 15 boules dont 3 boules rouges, 7 boules vertes et 5 boules jaunes. Un joueur tire une boule au hasard :

- si elle est rouge, il perd 50 €
- si elle est verte, il gagne 20 €
- si elle est jaune, il gagne *x* €.

Trouver *x* pour que le jeu soit équitable.
Conseil : on dit qu'un jeu est équitable lorsque E(X) = 0

EXERCICE 4 Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot de 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.
On achète un billet au hasard.
X est la variable aléatoire, définie sur Ω , égale au gain algébrique procuré par le billet.

1) Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?

CORRIGES

EXERCICE 1 : Un jeu consiste à lancer un dé non pipé
- si le joueur obtient un 1, il perd 30 €
- si le joueur obtient un 2, il perd 20 €
- si le joueur obtient un 3, il perd 10 €
- si le joueur obtient un 4, il ne perd ni ne gagne rien
- si le joueur obtient un 5 ou un 6, il gagne 30 €

1) *Soit X la variable aléatoire indiquant le gain (positif ou négatif) du joueur. Donner la loi de probabilité de X.*
2) *Calculer l'espérance.*
3) *Calculer la variance et l'écart-type.*

1) Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -30 ; -20 ; -10 ; 0 et 30.

$$p(X=-30)=\frac{1}{6}\ .;\ p(X=-20)=\frac{1}{6}\ ;\ p(X=-10)=\frac{1}{6}\ .;\ p(X=0)=\frac{1}{6}\ ;\ p(X=30)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

D'où la loi de probabilité de X :

X	-30	-20	-10	0	30	Total
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

On vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

2) Calcul de l'espérance :

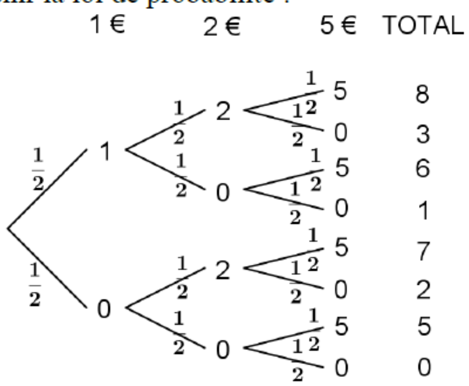
$$E(X)=\sum_{i=1}^{5} a_i \times p_i = -30\times\frac{1}{6}-20\times\frac{1}{6}-10\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{3}=-5-\frac{10}{3}-\frac{5}{3}+0+10=5-\frac{15}{3}=0\,.$$

Le jeu est équitable.

EXERCICE 2 : Un enfant lance simultanément trois pièces de monnaie de 1€, 2 € et 5 €. Il totalise les francs des pièces qui présentent le côté face.
Soit X la variable aléatoire comptant ce total en euros :

1) donner la loi de probabilité de X
2) calculer $p(X \leq 2)$ et $p(X > 6)$
3) calculer $E(X)$

1) Un arbre pondéré permettra d'obtenir la loi de probabilité :



Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.
D'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	5	6	7	8
Probabilité $p(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p(X > 6) = p(X = 7) + p(X = 8) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

3) Calcul de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{8} X_i \times p(X_i) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{1}{8} + 5\times\frac{1}{8} + 6\times\frac{1}{8} + 7\times\frac{1}{8} + 8\times\frac{1}{8}$$

$$= 0 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} + \frac{8}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

Si le joueur répète ce jeu un grand nombre de fois, il gagnera en moyenne un total de 4 €.

EXERCICE 3:

Dans une urne, il y a 15 boules dont 3 boules rouges, 7 boules vertes et 5 boules jaunes.
Un joueur tire une boule au hasard :
. si elle est rouge, il perd 50 €
. si elle est verte, il gagne 20 €
. si elle est jaune, il gagne x €.
Trouver x pour que le jeu soit équitable.

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : -50 ; 20 et x.
Or l'urne contient 15 boules dont 3 rouges, 7 vertes et 5 jaunes

Donc : $p(X=-50) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, $p(X=20) = \frac{7}{15}$, $p(X=x) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

On obtient la loi de probabilité de X :

X	-50	20	x
$p(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$

on vérifie que : $\sum_i p_i = 1$

Calcul de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} X_i \times p_i = -50\times\frac{1}{5} + 20\times\frac{7}{15} + x\times\frac{1}{3} = -10 + \frac{4\times5\times7}{3\times5} + \frac{x}{3} = -\frac{30}{3} + \frac{28}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

Or le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$ donc on résout l'équation :

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2$$

Ainsi **le jeu est équitable lorsque $x = 2$ €.**

EXERCICE 4:

1) *Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.*
En déduisant le prix d'achat du billet, X peut prendre les valeurs :
-2 , 98 , 148 et 498.

2) *Déterminer la loi de probabilité de X.*

$$p(X = 498) = \frac{1}{2000} \quad , \quad p(X = 148) = \frac{2}{2000} \quad \text{et} \quad p(X = 98) = \frac{5}{2000}$$

8 billets sont gagnants donc 1992 billets sont perdants :

$$p(X = -2) = \frac{1992}{2000}$$

Loi de probabilité de X :

X	-2	98	148	498	total
$p(X)$	$\frac{1992}{2000}$	$\frac{5}{2000}$	$\frac{2}{2000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{2000}{2000}$

3) *Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?*

Calcul de l'espérance :

$$E(\mathrm{X})=\frac{1992}{2000}\times(-2)+\frac{5}{2000}\times 98+\frac{2}{2000}\times 148+\frac{1}{2000}\times 498$$

$$=-\frac{3984}{2000}+\frac{490}{2000}+\frac{296}{2000}+\frac{498}{2000}$$

$$=-\frac{3984}{2000}+\frac{1284}{2000}$$

$$=-\frac{2700}{2000}=-1,35$$

S'il joue un grand nombre de fois, le joueur perd 1,35 € par partie