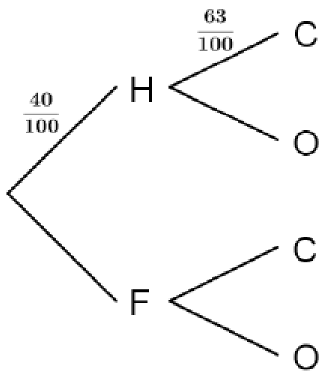
EXERCICES CORRIGES PROBABILITES CONDITIONNELLES

Exercice 01

Les 1 500 employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories : cadres et ouvriers.
On sait que cette entreprise emploie 40 % d'hommes et 60 % de femmes.
De plus, parmi les hommes 63 % sont cadres alors que parmi les femmes 48 % sont cadres.



1) Compléter l'arbre ci-contre en indiquant dans chacun des cadres le pourcentage correspondant.
   L'arbre s'appelle alors un arbre pondéré.
2) Combien y-a-t-il de femmes dans l'entreprise ?
   Combien y-a-t-il de femmes cadres dans l'entreprise ?
3) On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
   - Quelle est la probabilité $p(\mathrm{F})$ que la personne choisie soit une femme ?
   - Quelle est la probabilité $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})$ que la personne choisie soit une femme cadre ?
4) On choisit au hasard une femme de l'entreprise.
   Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ?
   On note cette probabilité $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ (probabilité que la personne choisie soit cadre sachant que c'est une femme).
   Montrer que $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C}) = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})\times p(\mathrm{F})$.
   Exprimer $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ en fonction de $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})$ et $p(\mathrm{F})$.

Exercice 03 Les élèves d'un lycée sont représentés dans le tableau ci-dessous :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	234	207	213	654
Garçons	203	185	192	580
Total	437	392	405	1 234

Pour représenter les élèves de ce lycée dans une commission départementale, on décide de choisir au hasard un élève parmi les 1 234 élèves. (Les résultats seront arrondis au millième)

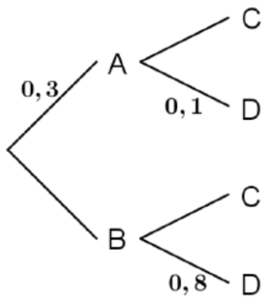
On note : G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;
F l'événement : « l'élève choisi est une fille » ;
T l'événement : « l'élève choisi est en Terminale » ;
P l'événement : « l'élève choisi est en Première » ;
S l'événement : « l'élève choisi est en Seconde ».

1) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille de Terminale ?
2) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille ?
3) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit un élève de Terminale ?
4) On sait que l'élève choisi est un garçon, justifier que la probabilité que ce soit un élève de Seconde est égale à 0,35.
5) On sait que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité que cet élève soit en Terminale ?
   Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.
6) On sait que l'élève choisi est un élève de Terminale, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
   Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.
7) Illustrer cet exercice par un arbre pondéré.

Exercice 04

Une situation de probabilités est représentée par l'arbre ci-contre.
Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$p(\mathrm{B})$; $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$; $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$; $p(\mathrm{C})$; $p(\mathrm{D})$; $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A})$



Exercice 05

A et C sont deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.

On sait que : $p(\mathrm{A})=0,6$ $\quad p(\mathrm{C})=0,5$ $\quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=0,18$

Déterminer $p(\overline{\mathrm{A}})$; $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$; $p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{C}})$; $p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{C})$; $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C})$; $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{C}})$; $p_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{A}})$

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilités)

Exercice 10

Une pièce de monnaie n'est pas équilibrée. La probabilité d'obtenir pile est égale à 0,55.
On jette successivement deux fois cette pièce.
Traduire la situation par un arbre de probabilités.

À l'issue des deux tirages successifs quelles sont les probabilités :

- d'avoir obtenu deux fois pile ;
- d'avoir obtenu deux résultats identiques ;
- d'avoir obtenu deux résultats différents.

Exercice 13

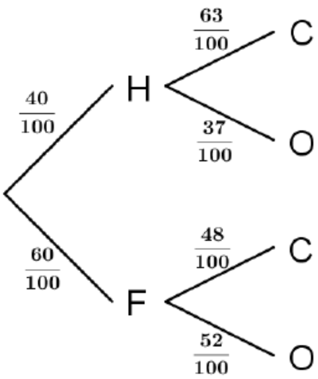
Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.
On rencontre au hasard un candidat qui s'était présenté.

1. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée ?
3. Calculez la probabilité que ce candidat soit engagé ?
4. Le candidat n'a pas été engagé. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

CORRIGES

Exercice 01

Les 1 500 employés d'une grande entreprise se divisent en deux catégories : cadres et ouvriers.
On sait que cette entreprise emploie 40 % d'hommes et 60 % de femmes.
De plus, ***63 % des hommes sont cadres*** *alors que parmi les femmes* ***48 % des femmes sont cadres****.*



1) *Compléter l'arbre ci-contre en indiquant dans chacun des cadres le pourcentage correspondant.*
   L'arbre s'appelle alors un **arbre pondéré**.
2) *Nombre de femmes dans l'entreprise :*
   $$1500\times\frac{60}{100}=900 \text{ femmes}$$
   Nombre de femmes cadres dans l'entreprise :
   $$900\times\frac{48}{100}=432 \text{ femmes sont cadres.}$$
3) *On choisit au hasard une personne de l'entreprise.*
   - *Probabilité que la personne choisie soit une femme :*
   $$p(\mathrm{F})=\frac{\text{nombre de femmes}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{900}{1500}=\frac{3}{5}=0,6$$
   - *Quelle est la probabilité que la personne choisie soit une femme cadre :*
   $$p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=\frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre de salariés}}=\frac{432}{1500}=\frac{12\times36}{12\times125}=\frac{36}{125}=0,288$$
4) *On choisit au hasard une femme de l'entreprise.*
   Quelle est la probabilité que cette femme soit cadre ?
   On note cette probabilité $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ (probabilité que la personne choisie soit cadre sachant que c'est une femme).
   $$\rightarrow p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})=\frac{\text{nombre de femmes cadres}}{\text{nombre de femmes}}=\frac{432}{900}=\frac{12\times36}{25\times36}=\frac{12}{25}=0,48$$
   Montrer que $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})\times p(\mathrm{F})$.
   $$\rightarrow p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})\times p(\mathrm{F})=0,48\times0,6=0,288=p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})$$
   Exprimer $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ en fonction de $p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})$ et $p(\mathrm{F})$.
   $$\rightarrow p_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})=\frac{p(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{F})}$$

Exercice 03 Les élèves d'un lycée sont représentés dans le tableau ci-dessous :

	Seconde	Première	Terminale	Total
Filles	234	207	213	654
Garçons	203	185	192	580
Total	437	392	405	1 234

Pour représenter les élèves de ce lycée dans une commission départementale, on décide de choisir au hasard un élève parmi les 1 234 élèves. (Les résultats seront arrondis au millième)

On note : *G l'événement : « l'élève choisi est un garçon » ;*
F l'événement : « l'élève choisi est une fille » ;
T l'événement : « l'élève choisi est en Terminale » ;
P l'événement : « l'élève choisi est en Première » ;
S l'événement : « l'élève choisi est en Seconde ».

1) *Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille de Terminale ?*

$$p(F \cap T) = \frac{\text{nombre de filles en terminale}}{\text{nombre d'élèves}} = \frac{213}{1234} \simeq 0{,}173$$

2) *Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille ?*

$$p(F) = \frac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre d'élèves}} = \frac{654}{1234} \simeq 0{,}530$$

3) *Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit un élève de Terminale ?*

$$p(T) = \frac{\text{nombre de terminales}}{\text{nombre d'élèves}} = \frac{405}{1234} \simeq 0{,}328$$

4) *On sait que l'élève choisi est un garçon, justifier que la probabilité que ce soit un élève de Seconde est égale à 0,35.*

$$p_G(S) = \frac{\text{nombre de garçons en seconde}}{\text{nombre de garçons}} = \frac{203}{580} = 0{,}35$$

5) *On sait que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité que cet élève soit en Terminale ?*
Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.

$$p_F(T) = \frac{\text{nombre de filles en terminale}}{\text{nombre de filles}} = \frac{213}{654} \simeq 0{,}326$$

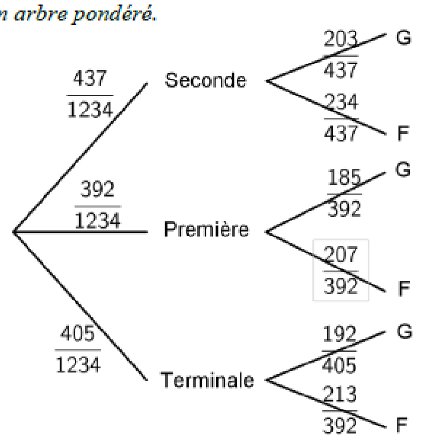
$$\frac{p(F \cap T)}{p(F)} = \frac{0{,}173}{0{,}530} \simeq 0{,}326 = p_F(T)$$

6) *On sait que l'élève choisi est un élève de Terminale, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?*
Relier ce résultat aux résultats des questions précédentes.

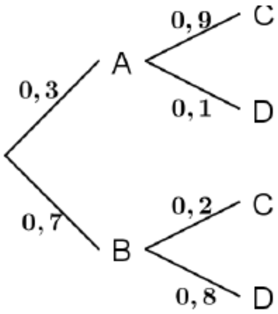
$$p_T(F) = \frac{\text{nombre de filles en terminale}}{\text{nombre de terminales}} = \frac{213}{405} \simeq 0{,}526$$

$$\frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}173}{0{,}328} \simeq 0{,}527 \simeq p_T(F)$$

7) *Illustrer cet exercice par un arbre pondéré.*



Exercice 04



Une situation de probabilités est représentée par l'arbre ci-contre.
Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$p(B)=1-p(A)=0,7 \qquad p_A(C)=1-p_A(D)=0,9$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p(A\cap C)=p(A)\times p_A(C)=0,9\times 0,3=0,27$$

A et B forment une partition de l'univers :
Formule des probabilités totales :

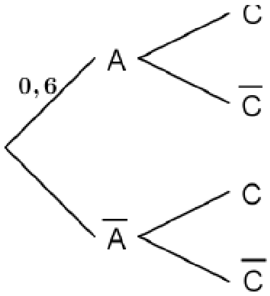
$$\begin{aligned} p(C)&=p(A\cap C)+p(B\cap C)\\ &=p(A)\times p_A(C)+p(B)\times p_B(C)\\ &=0,3\times 0,9+0,7\times 0,2=0,27+0,14=0,41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(D)&=p(A\cap D)+p(B\cap D)\\ &=p(A)\times p_A(D)+p(B)\times p_B(D)\\ &=0,3\times 0,1+0,7\times 0,8=0,03+0,56=0,59 \end{aligned}$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_C(A)=\frac{p(A\cap C)}{p(C)}=\frac{0,27}{0,41}=\frac{27}{41}\simeq 0,659$$

Exercice 05



A et C sont deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.

On sait que : $p(A)=0,6 \qquad p(C)=0,5 \qquad p(A\cap C)=0,18$

$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A donc :

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-0,6=0,4$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_A(C)=\frac{p(A\cap C)}{p(A)}=\frac{0,18}{0,6}=0,3$$

Loi des nœuds :

$$p_A(C)+p_A(\overline{C})=1 \quad \text{donc} \quad p_A(\overline{C})=1-p_A(C)=1-0,3=0,7$$

A et $\overline{A}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(A\cap C)+p(\overline{A}\cap C)=p(C) \quad \text{donc} \quad p(\overline{A}\cap C)=p(C)-p(A\cap C)=0,5-0,18=0,32$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\overline{A}}(C)=\frac{p(\overline{A}\cap C)}{p(\overline{A})}=\frac{0,32}{0,4}=0,8$$

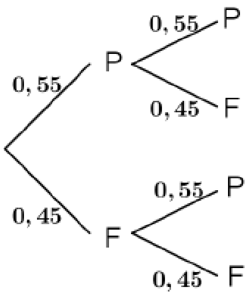
Loi des nœuds :

$$p_{\overline{A}}(C)+p_{\overline{A}}(\overline{C})=1 \quad \text{donc} \quad p_{\overline{A}}(\overline{C})=1-p_{\overline{A}}(C)=1-0,8=0,2$$

Loi des probabilités conditionnelles :

$$p_C(\overline{A})=\frac{p(\overline{A}\cap C)}{p(C)}=\frac{0,32}{0,5}=0,64$$

Exercice 10



Une pièce de monnaie n'est pas équilibrée.
La probabilité d'obtenir pile est égale à 0,55.
On jette successivement deux fois cette pièce.
Traduire la situation par un arbre de probabilités.
À l'issue des deux tirages successifs quelles sont les probabilités :

- *d'avoir obtenu deux fois pile ;*
- *d'avoir obtenu deux résultats identiques ;*
- *d'avoir obtenu deux résultats différents.*

Probabilité d'obtenir deux fois pile : $p(PP)=0,55\times 0,55=0,3025$

Probabilité d'obtenir deux résultats identiques : $p(PP)+p(FF)=0,55\times 0,55+0,45\times 0,45=0,505$

Probabilité d'obtenir deux résultats différents:

$$p(PF)+p(FP)=1-\left[p(PP)+p(FF)\right]=1-0,505=0,495$$

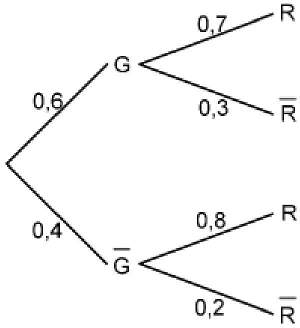
Exercice 13 :

Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

On rencontre au hasard un candidat qui s'était présenté.

1. *Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé ?*
2. *Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée ?*
3. *Calculez la probabilité que ce candidat soit engagé ?*
4. *Le candidat n'a pas été engagé. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?*

Soit G l'évènement « le candidat est un garçon » et R l'évènement « le candidat est reçu ». On obtient :



1. **Formule des probabilités conditionnelles** :

   $p(G \cap R) = p(G) \times p_G(R) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$

   → 42 % des candidats sont des garçons engagés

2. $p(F \cap R) = p(F) \times p_F(R) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$

   → 32 % des candidats sont des filles engagées

3. Garçons et filles forment une partition de l'ensemble des candidats.
   D'après la **loi des probabilités totales** :

   $p(R) = p(G \cap R) + p(F \cap R) = 0,42 + 0,32 = 0,74$

   → 74 % des candidats ont été reçus.

4. **Formule des probabilités conditionnelles** :

$$p_{\overline{R}}(\overline{G}) = \frac{p(\overline{G} \cap \overline{R})}{p(\overline{R})} = \frac{p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(\overline{R})}{1 - p(R)} = \frac{0,4 \times 0,2}{1 - 0,74} \simeq 0,3077$$

Environ 30,77 % des candidats non retenus sont des filles.