Chapitre 6

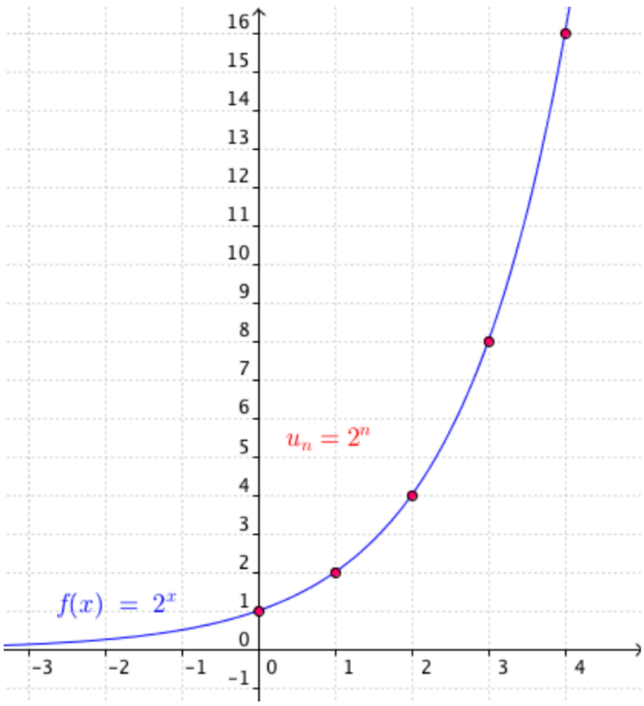
# Fonction exponentielle

## I. Définition et propriété

### 1) définition

On considère la suite géométrique de raison $a$ définie par $u_n = a^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel $n$. En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base $a$
Ainsi par exemple :
Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u_4 = 2^4$ Pour la fonction correspondante, on a :
$f(4) = 2^4$ mais on a également : $f(1,3) = 2^{1,3}$ Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel $x$ positif.

La fonction $f$ est appelée fonction exponentielle de base 2 .




**Propriété**

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

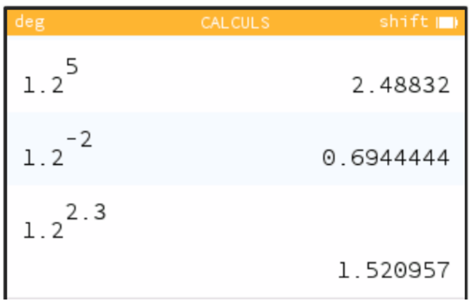
L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de $x$ négatives.

**Définition**

La fonction $x \mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $a > 0$, s'appelle fonction exponentielle de base $a$.

**Exemple :** La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1,2^x$.

**Remarque :** Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.



**Propriété**

Propriété : La fonction exponentielle de base $a$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

### 2) propriétés

**Propriétés**

**1)** $a^0 = 1$ et $a^1 = a$ **2)** $a^{x+y} = a^x \times a^y$ **3)** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **4)** $(a^x)^n = a^{nx}$, avec $n$ un entier relatif.

**Méthode - Simplifier une expression**

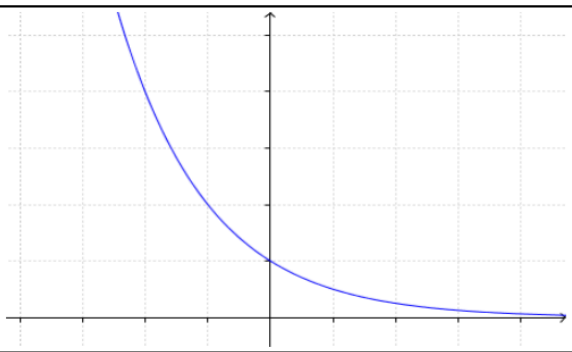
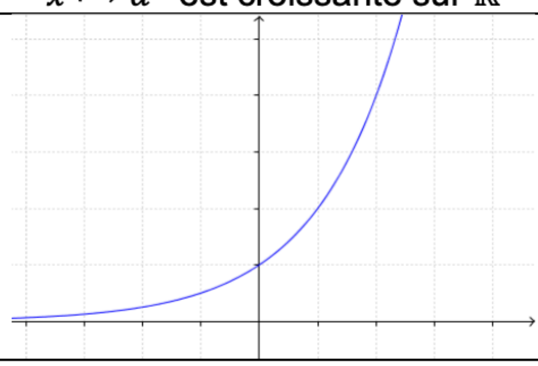
Simplifier les expressions suivantes :

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$
$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$
$A = 4^{-3+(-5)}$
$A = 4^{-8}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$
$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$
$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5}$
$B = \dfrac{3^{3-2,5}}{3^{2\times 5}}$
$B = \dfrac{3^{0,5}}{3^{10}}$
$B = 3^{0,5-10}$
$B = 3^{-9,5}$
$B = \dfrac{1}{3^{9,5}}$

$C = \left(4,8^{-2,1}\right)^3 \times 4,8^{6,2}$
$C = \left(4,8^{-2,1}\right)^3 \times 4,8^{6,2}$
$C = 4,8^{-2,1\times 3} \times 4,8^{6,2}$
$C = 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2}$
$C = 4,8^{-6,3+6,2}$
$C = 4,8^{-0,1}$
$C = \dfrac{1}{4,8^{0,1}}$

## II. Variations de la fonction exponentielle

| $0 < a < 1$ | $a > 1$ |
|---|---|
| $x \longmapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ | $x \longmapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ |
|  |  |

**Remarques** :

- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$
- Quel que soit $a$, la fonction exponentielle passe par le point $(0;1)$. En effet, $a^0 = 1$

## Méthode - Utiliser une fonction exponentielle

**Enoncé :** Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction $f$ définie sur $[0;10]$ par : $f(x) = 50000 \times 1,15^x$

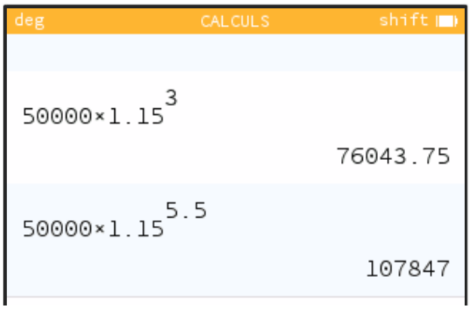
**1)** À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5 h30.

**2)** Déterminer les variations de $f$ sur $[0\,;\,10]$.

**3)** À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

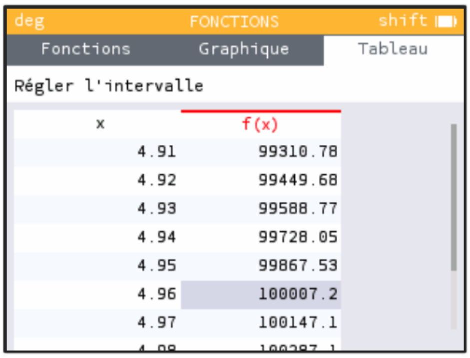
**Réponse :**

**1)** $f(3) = 50000 \times 1,15^3 \approx 76000$
$f(5,5) = 50000 \times 1,15^{5,5} \approx 108000$




**2)** $a = 1,15 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 1,15^x$ est strictement croissante sur $[0;10]$ Il en est de même pour la fonction $f$.

**3)** Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ $5h$.



## III. Taux d'évolution moyen

**Méthode - Calculer un taux d'évolution moyen**

**Enoncé :** Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25%.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.
**Réponse :** On note $t$ le taux d'évolution moyen annuel. Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation sur un an est égal à :

$$1+\frac{t}{100}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation sur trois ans (de 2012 à 2015 ) est égal à :
$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=\left(1+\frac{t}{100}\right)^3$
Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25% donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : 1,25. On a donc :
$\left(1+\frac{t}{100}\right)^3=1,25$

**Propriété**

Si $x^n=a$ alors $x=a^{\frac{1}{n}}$

$1+\frac{t}{100}=1,25^{\frac{1}{3}}$
$\frac{t}{100}=1,25^{\frac{1}{3}}-1$
$t=100\times\left(1,25^{\frac{1}{3}}-1\right)$
$t\approx 7,72\%$
Le taux d'évolution moyen annuel est environ égal $7,72\%$

**Remarque :** $a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la racine n-ième de $a$. On peut également noté $\sqrt[n]{a}$. On a par exemple : Si $x^2=a$ alors $x=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$!