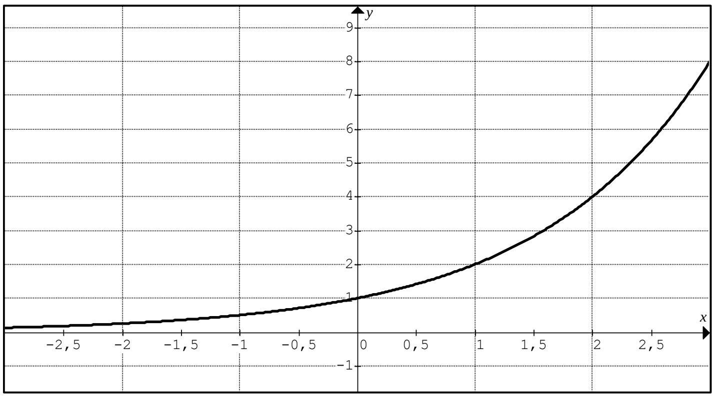
CHAPITRE 3 : LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

1. LES FONCTIONS EXPONENTIELLES a^x

a / Définition : Soit a un réel strictement positif et différent de 1
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction f, qui, à tout x **réel** associe **a^x**

$$f(x) = a^x$$

b / Exemple : soit f telle que **$f(x) = 2^x$**



Graphiquement, résoudre :
f(2) = ...
f(-1) = ...

Remarque : Avant la classe de Terminale, vous avez abordé les puissances de nombres à exposants **entiers**
Exemples : 2^3 = ... 2^{-3} = ...

Or, il faut maintenant admettre que l'expression $2^{1,5}$ est bien définie.
Graphiquement, on lit : ....
Vérifions, à l'aide de la calculatrice : $2^{1,5}$ = ...

c / Propriétés (Avec x et y réels) :

Propriétés	Exemples
$a^x \times a^y = a^{\cdots\cdots}$	$5,4^{2,4} \times 5,4^{4,6} = 5,4^{\cdots\cdots}$
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{\cdots\cdots}$	$\dfrac{4^{4,2}}{4^{-1,2}} = 4^{\cdots\cdots}$
$(a^x)^y = a^{\cdots\cdots}$	$(4,9^{2,8})^5 = 4,9^{\cdots\cdots}$
$a^x \times b^x$ = (a	$4^{5,4} \times 3^{5,4}$ = ...
a^{-x} = ...	$3^{-1,5}$ = ...
a^0 = ...	$7,5^0$ = ...

Remarque :
Soit a un nombre positif, alors, pour tout réel x , l'expression a^x est ***toujours*** ....

d / Exercices : Simplifier les écritures suivantes :

$7^{2,1} \times 7^{4,3} \times 7^{1/4} = 7^{\dots\dots\dots}$	$\dfrac{(5^{3,1})^4}{5^{1,4}} = 5^{\dots\dots\dots}$
$\dfrac{3^{1,5} \times 3^{-2}}{3^{-5}} = 3^{\dots\dots\dots}$	$(2 \times 7)^{4,2} \times 2^{-3} \times 7^{3,2} = 2^{\dots\dots\dots} \times 7^{\dots\dots\dots}$

2. SENS DE VARIATION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longrightarrow a^x$

a/ Rappel : Les suites géométriques

Soient (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3 et (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 0,8.

Le terme de rang n s'obtient à l'aide des relations :

u_n = ... et v_n = ...

Complétons le tableau suivant :

n	1	2	3	10
u_n				
v_n				

Conclusions : Lorsque n augmente, alors u_n .... et v_n ....

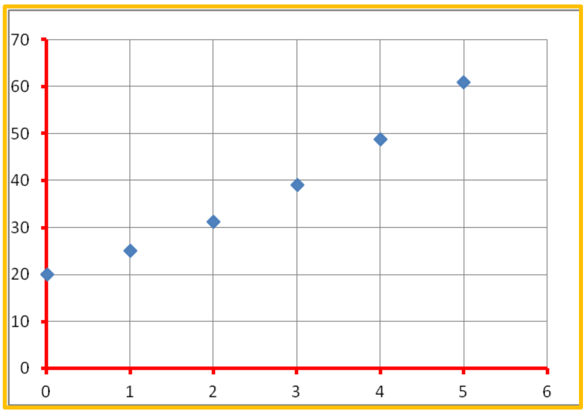
Explications :

Une suite géométrique est .... si sa raison est ....

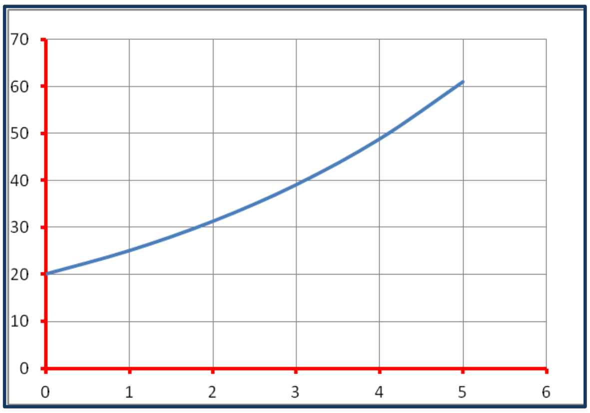
Une suite géométrique est .... si sa raison est ....

Nous admettrons que le sens de variation des suites géométriques s'étend aux fonctions exponentielles f telles que f(x) =............

$u_n = 20 \times 1,25^n$



$f(x) = 20 \times 1,25^x$



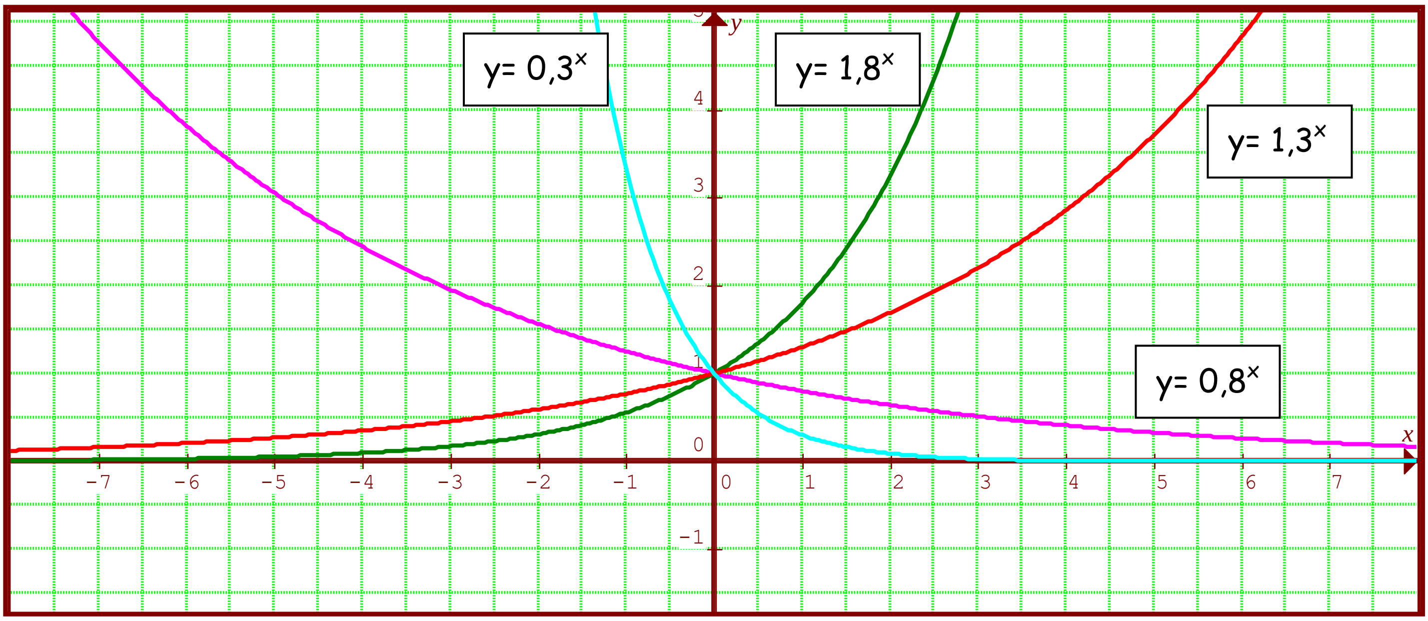
n prend des valeurs ....

x prend des valeurs ....

b/ Définition :

Soit a un nombre strictement positif

- Si a ………, la fonction exponentielle $x \longrightarrow a^x$ est strictement ……………………………… sur ℝ
- Si a ………, la fonction exponentielle $x \longrightarrow a^x$ est strictement ……………………………… sur ℝ



c/ Exemple de tableau de variation

x	- 5	4
$f(x) = 1{,}3^x$	0,27 ↗	2,85

3. SENS DE VARIATION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longrightarrow k\,a^x$

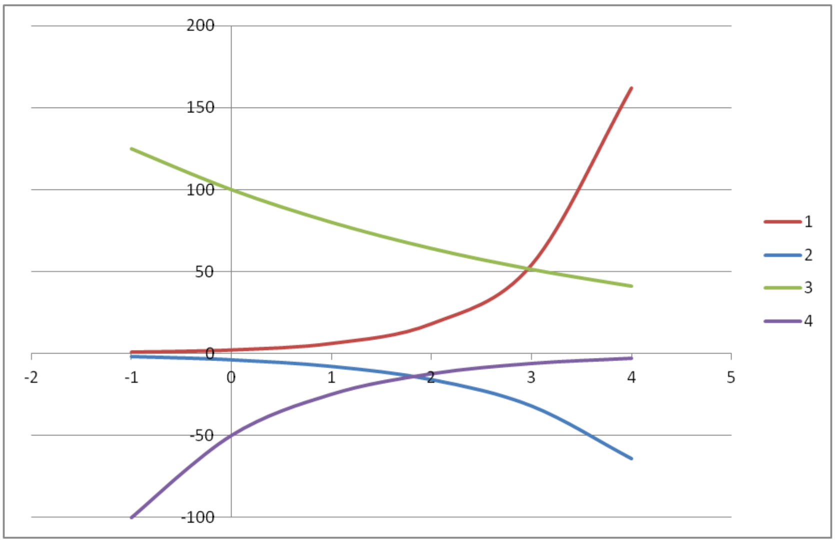
Quatre cas peuvent se présenter. Complétons les tableaux de valeurs suivants :

	x	-2	-1	0	1	2	10
① $f(x) = 2 \times 3^x$							
② $g(x) = -4 \times 2^x$							
③ $h(x) = 100 \times 0{,}8^x$							
④ $m(x) = -50 \times 0{,}5^x$							

Conclusion :

SENS DE VARIATION DE LA FONCTION : $f(x) = k\,a^x$		Valeur de k	
		Positive	**Négative**
Valeur de a	**Supérieure à 1**	①……………………….ante	②……………………….ante
	Inférieure à 1	③……………………….ante	④……………………….ante

Vérification graphique



4. EQUATIONS DE LA FORME $x^n = y$ (x et y positifs)

a. Résolvons : $x^2 = 9$ alors, $x = ... = 9^{.....} = ...$

- La racine carrée est la réciproque de la fonction carrée $\left(\sqrt{a^2}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 = ...$

$x^3 = 125$ alors, $x = ... = 125^{....} = ...$

D'une manière générale, l'équation $x^n = y$ admet pour solution $x = y^{.........}$

b. Résolvons : $x^6 = 729$ alors, $x = 729^{.....} = ...$

On vérifie que $.......^6 = 729$

c. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et telle que $u_4 = 6\,480$
Calculons la valeur de la raison q On rappelle que $u_n = u_0 \times$ ....

Alors, $u_4 = u_0 \times$ .... ou $\dfrac{.............}{.............} = q^{.........}$ ou $\dfrac{.............}{.............} = q^{.........}$

Conclusion : Si $q^{...} =$ .... alors, $q =$ .... = ...

Vérifions :

5	....	....	....	....
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4

d. Un capital de 1 200 € est placé à intérêts composés. Au bout de 8 ans de placement, la valeur acquise s'élève à 1 706,53 €. En déduire le taux annuel de placement
On rappelle que les valeurs acquises prises par un capital placé à intérêts composés forment une suite .... Donc, $C_n = C_0 \times$ ....

Alors, $C_8 = C_0 \times$ .... ou $\dfrac{.............}{.............} = q^{.........}$ ou $\dfrac{.............}{.............} = q^{.........}$

Conclusion : Si $q^{...} =$ .... alors, $q =$ .... = ...

Le taux annuel de placement s'élevait donc à .... %

5. APPLICATION AU CALCUL DU TAUX MOYEN

1/ Rappel : Les coefficients multiplicateurs

Un commerçant décide d'appliquer une augmentation de 12 % sur le prix d'un article

Par quel coefficient multiplicateur CM peut-on passer du prix brut au prix net ?
Réponse : $\mathrm{CM} = \frac{100 + \ldots\ldots\ldots}{100}$ ou $1 + \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

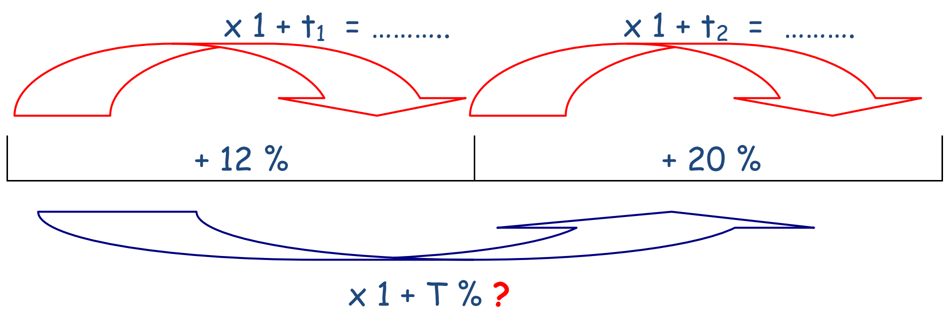
a. Complétons le tableau suivant

Opération	Augmentation 20 %	Réduction 22 %	Majoration 20 %	…………
Coefficient CM	…………	…………	…………	2

2/ Le taux global T

a. Un commerçant décide d'appliquer une augmentation de 12 % sur le prix d'un article, puis une seconde augmentation de 20 %, un mois plus tard. Déterminons le taux global T d'augmentation. (T ≠ 32 %, ***BIEN SUR***)

- Augmentation : $t_1 = 12\ \%$ ⇛ Coefficient : $1 + t_1 = 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1,\ldots\ldots\ldots$
- Augmentation : $t_2 = 20\ \%$ ⇛ Coefficient : $1 + t_2 = 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1,\ldots\ldots\ldots$



Appelons T, le taux d'évolution global de ces deux augmentations

On peut écrire : $\mathbf{1 + T = (1 + t_1) \times (1 + t_2)}$

Alors, $1 + T = 1,\ldots\ldots\ldots \times 1,\ldots\ldots\ldots = 1,\ \ldots\ldots\ldots$
On en déduit que : $T = \ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Le taux global T s'élève donc à ……………… %
Conclusion : Augmenter un prix de 12 %, puis de 20 % revient à l'augmenter GLOBALEMENT de ……………… %

b. Un commerçant décide d'appliquer une augmentation de 45 % sur le prix d'un article, puis, une remise de 20 % à l'occasion des soldes, un mois plus tard.
Déterminons le taux global T

- Augmentation : t_1 = 45 % ⇛ Coefficient k_1 = 1 + ………………. = 1,…………
- Réduction : t_2 = - 20 % ⇛ Coefficient k_2 = 1 + …………… = 0,…………

$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)$
Alors, 1 + T = 1,………… x 0,……………… = 1, ……….
On en déduit que : T = ………………….. - ……….. = ………..

Le taux global T correspond donc à une ……………………………… de …………….. %

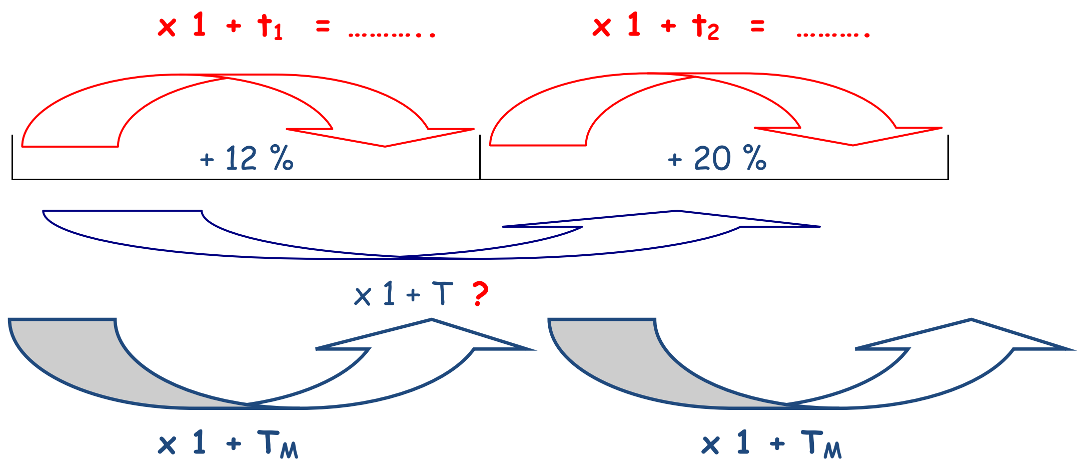
3/ Le taux moyen T_M

a. Dans l'exercice précédent, nous avons vu qu'appliquer deux augmentations successives de 12, puis 20% équivaut à une augmentation globale de ……………….. %
Aurait-on obtenu le même résultat en appliquant deux augmentations successives de 16 %

$\left(\frac{12+20}{2} = 16 \right)$????????????????

b. Définition : Appliquons deux opérations de t_1 et t_2 % sur un prix
Le taux d'évolution moyen T_M représente le taux …………………… qu'il aurait fallu appliquer afin d'obtenir le ………………… taux global T
Il est donné par la relation :

$$\boxed{(1 + T_M)^2 = (1 + t_1)(1 + t_2) = 1 + T}$$



Rappel : L'équation du type $x^n = y$ admet une solution du type $x = y^{\dots\dots}$
Ici : $(1 + t_M)^2$ = 1, ……………
On peut en déduire que : $1 + t_M$ = 1,…………$^{\dots\dots}$ = ……………….
Conclusion : t_M = ……………………. - ………………. = ……………. soit ……………….. %
Le taux d'évolution moyen est donc de …………………. % (et non pas 16 % !!!)

Conclusion : Augmenter un prix de 12 %, puis de 20 % revient à l'augmenter à ……………………… fois de …………….. %

c. Exemple : En subissant quatre augmentations successives, le prix d'un article a été majoré de 80 %. En déduire le taux d'évolution moyen

On sait que : ………… = 0,80

$$\boxed{(1 + T_M)^{\cdots\cdots} = 1 + T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Le taux d'évolution moyen est donc de ……………… % (et non pas 20 % (80 %/4) !!!)

d. Exercice : Le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 2 % en deux ans.
En déduire le taux d'évolution moyen

On sait que : ………… = 0,02

$$\boxed{(1 + t_M)^{\cdots\cdots} = 1 + T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Le taux d'évolution moyen est donc de ……………… %

Remarque : Pour une ………………….. valeur du taux global T , on peut en déduire que :

$$T_M = \frac{1}{2} T \quad \text{(en 2 ans !)}$$

On peut, donc, affirmer, avec une précision suffisante, qu'une augmentation de 2 % en deux ans représente une augmentation moyenne de 1 % par an

e. AUTRE RELATION

Nous avons vu que le taux moyen T_M s'obtient à l'aide de la relation :

$$\boxed{(1 + T_M)^n = (1 + t_1) (1 + t_2) (1 + t_3) \ldots\ldots (1 + t_n) = 1 + T}$$

Il est possible de remplacer 1 + T par CM (le coefficient multiplicateur …………………………)

La relation devient : $(1 + T_M)^n = CM$ donc, $1 + T_M = CM^{\cdots\cdots\cdots}$

Alors : $T_M =$ ……………………..