EXERCICES CORRIGES : FONCTION INVERSE

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, puis les écrire sous forme d'un quotient lorsque cela est possible

	f (x)	f ' (x)
1	$\frac{8}{x} = \cdots\ldots\ldots\times\frac{1}{x}$	
2	$\frac{-2}{x} = \cdots\ldots\ldots\times\frac{1}{x}$	
3	$-2x + \frac{8}{x}$	

2. Résoudre l'équation $\frac{3x+5}{x^2} = 0$

3. Etudier le signe des expressions suivantes

Expression	Intervalle d'étude	Signe du numérateur	Signe du dénominateur	Signe de l'expression
$\frac{2x + 3}{x^2}$	[1 ; 10]	…………	…………	…………
$\frac{-3}{x^2}$	[1 ; 6]	…………	…………	…………

4. La fonction f est définie sur [1 ; 5] par : $f(x) = 0{,}1x - 1 + \frac{0{,}4}{x}$

a/ Déterminer la dérivée f ' (x)

b/ Montrer que la dérivée peut se mettre sous la forme $\frac{0{,}1(x-2)(x+2)}{x^2}$

c/ Etudier le signe de la dérivée sur l'intervalle [1 ; 5]

d/ Dresser le tableau de variations de f sur [1 ; 5]

5. Un artisan fabrique des meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués peut être modélisé par la fonction C définie par : $C(x) = x^2 + 50x + 900$

a/ Calculer le coût de production de 20 meubles

b/ Calculer le coût de production, par meuble, lorsque l'artisan fabrique 20 meubles

c/ Soit f(x) le coût unitaire moyen pour x meubles fabriqués.
Exprimer f(x) en fonction de x pour x appartenant à l'intervalle [10 ; 60]

d/ Soit f la fonction définie sur [10 ; 60] par : $f(x) = x + 50 + \frac{900}{x}$
Justifier que $f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$

e/ Etudier le signe de f '(x) sur [10 : 60]

f/ En déduire le tableau de variations de f sur [10 : 60]

g/ Quel nombre de meubles doit fabriquer l'artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ?

h/ Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 meuble en abscisses et 1 cm pour 5 € en ordonnées)

i/ Chaque meuble est vendu 115 €.
Tracer dans le repère précédent, la droite D d'équation : y = 115

j/ En déduire l'intervalle de production pour lequel l'artisan réalise un bénéfice

EXERCICES CORRIGES : FONCTION INVERSE

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, puis les écrire sous forme d'un quotient lorsque cela est possible

	f (x)	f ' (x)
1	$\frac{8}{x} = \mathbf{8}.\times\frac{1}{x}$	$8 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{\mathbf{-8}}{\mathbf{x^2}}$
2	$\frac{-2}{x} = \mathbf{-2} \times \frac{1}{x}$	$-2 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x^2}}$
3	$-2x + \frac{8}{x}$	$-2 - \frac{8}{x^2} = \frac{\mathbf{2x^2 - 8}}{\mathbf{x^2}} = \frac{\mathbf{2(x^2 - 4)}}{\mathbf{x^2}} = \frac{\mathbf{2(x-2)(x+2)}}{\mathbf{x^2}}$

2. Résoudre l'équation $\frac{3x+5}{x^2} = 0$

C'est une équation quotient. $\frac{a}{b} = 0 \text{ si } a = 0$
$3x^2 + 5 = 0$ ou $3x^2 = -5$ ou $x^2 = -5/3$ Un carré négatif ? impossible
Cette équation n'admet pas de solutions réelles

3. Etudier le signe des expressions suivantes

Expression	Intervalle d'étude	Signe du numérateur	Signe du dénominateur	Signe de l'expression
$\frac{2x + 3}{x^2}$	[1 ; 10]	Hypothèse : le numérateur est positif $2x + 3 > 0$ $2x > -3$ $x > -3/2$ x appartenant à [1 ; 10] donc supérieur à -3/2, le numérateur est toujours **POSITIF**	**POSITIF**	**POSITIF**
$\frac{-3}{x^2}$	[1 ; 6]	**NEGATIF**	**POSITIF**	**NEGATIF**

4. La fonction f est définie sur [1 ; 5] par : $f(x) = 0{,}1x - 1 + \frac{0{,}4}{x}$

a/ Déterminer la dérivée f ' (x)

$$f'(x) = 0{,}1 - \frac{0{,}4}{x^2} = \frac{0{,}1x^2 - 0{,}4}{x^2}$$

b/ Montrer que la dérivée peut se mettre sous la forme $\frac{0{,}1(x-2)(x+2)}{x^2}$

$$\frac{0{,}1(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{0{,}1\,x^2 - 0{,}4}{x^2} = f'(x)$$

c/ Etudier le signe de la dérivée sur l'intervalle [1 ; 5]

f '(x) = 0 si 0,1(x -2)(x+2) = 0 si x – 2 = 0 ou x + 2 = 0
x = 2 x = -2

x	1		2		5
0,1		+		+	
x - 2		-	0	+	
x + 2		+		+	
x^2		+		+	
f '(x)		-	0	+	

d/ Dresser le tableau de variations de f sur [1 ; 5]

x	1		2		5
f '(x)		-	0	+	
f (x)	-0,5	$\searrow$	-0,6	$\nearrow$	0,42

5. Un artisan fabrique des meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués peut être modélisé par la fonction C définie par : $C(x) = x^2 + 50x + 900$

a/ Calculer le coût de production de 20 meubles

$C(20) = 20^2 + 50 \times 20 + 900 = 2\,300$ €

b/ Calculer le coût de production, par meuble, lorsque l'artisan fabrique 20 meubles

2 300 / 20 = 115 €

c/ Soit f(x) le coût unitaire moyen pour x meubles fabriqués.
Exprimer f(x) en fonction de x pour x appartenant à l'intervalle [10 ; 60]

$$f(x)\ \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{50x}{x} + \frac{900}{x} = x + 50 + \frac{900}{x}$$

d/ Soit f la fonction définie sur [10 ; 60] par : $f(x) = x + 50 + \frac{900}{x}$

Justifier que $f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$

Déterminons f '(x) = $1 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2 - 900}{x^2}$

Développons (x – 30)(x + 30)
C'est une identité remarquable : (a+b)(a-b) = $a^2 - b^2$
Donc, (x – 30)(x + 30) = $x^2 - 900$ On retrouve bien le numérateur de notre dérivée

e/ Etudier le signe de f '(x) sur [10 : 60]

Résolvons f ' (x) = 0 soit (x – 30)(x + 30) = 0
Equation produit : si x – 30 = 0 ou x + 30 = 0
x = 30 x = -30

x	10	30	60
x - 30	-	0	+
x + 30	+	|	+
x^2	+	|	+
f '(x)	-	0	+

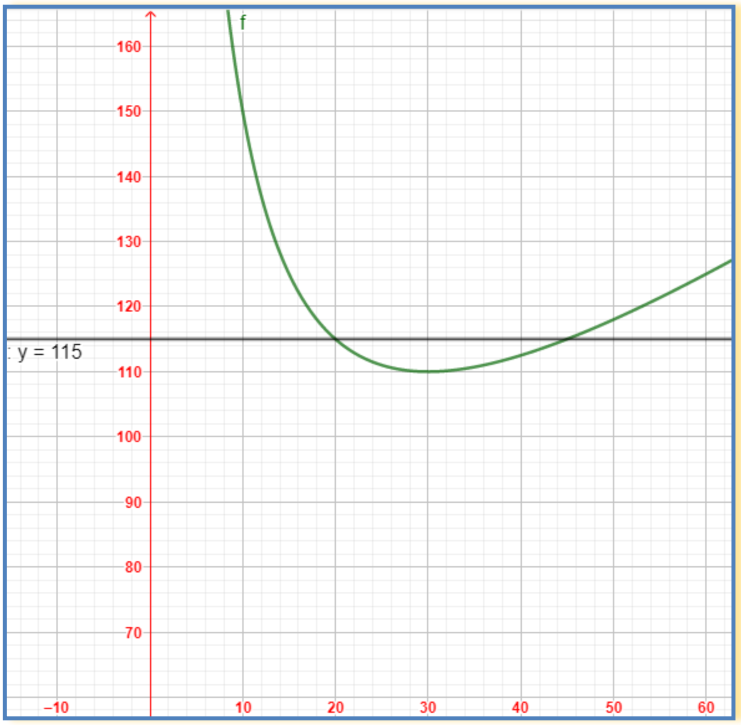
f/ En déduire le tableau de variations de f sur [10 : 60]

x	10	30	60
f '(x)	-	0	+
f (x)	150 ↘	110	↗ 125

g/ Quel nombre de meubles doit fabriquer l'artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ?

L'artisan doit fabriquer 30 meubles (110 € l'unité)

h/ Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal
(1 cm pour 1 meuble en abscisses et 1 cm pour 5 € en ordonnées)



i/ Chaque meuble est vendu 115 €.
Tracer dans le repère précédent, la droite D d'équation : y = 115

Voir ci-dessus

j/ En déduire l'intervalle de production pour lequel l'artisan réalise un bénéfice

L'artisan réalise un bénéfice lorsque la courbe coût moyen unitaire (en rouge) est située **<u>au dessous</u>** de la droite y = 115

L'intervalle est donc : [20 ; 45]