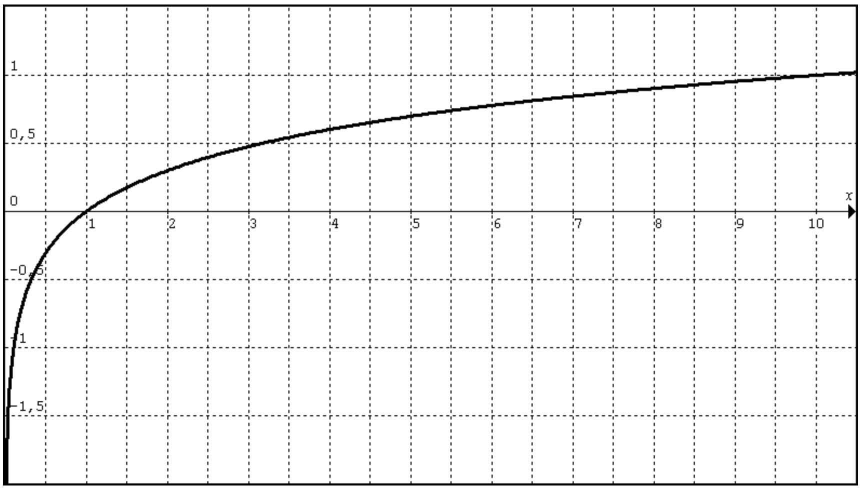
COURS Le logarithme décimal

I. Fonction logarithme décimal $\log(x)$

Définition On admet qu'il existe une unique fonction, appelée « ***logarithme décimal*** » et notée « ***log*** », telle que :
¤ ***log*** est définie sur $]0\,;+\infty[$;
¤ pour tout réel x, on a : $\log(10^x) = x$.

Remarques ¤ On dit que la fonction ***log*** est la fonction réciproque de la fonction 10^x.

Courbe représentative de la fonction logarithme décimal



Variation
propriété admise

La fonction ***log*** définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \log(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Signe
propriété admise

¤ Si $0 < x < 1$, alors $\log(x) < 0$ (strictement négatif) .
¤ Si $x > 1$, alors $\log(x) > 0$ (strictement positif) .

Propriétés Pour tout nombre réel x, a et b où a et b sont strictement positifs, on a :

- $\log(a) < \log(b)$ revient à dire que $a < b$
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(a^x) = x \times \log(a)$

Preuves :

- On sait qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
  Comme la fonction ***log*** est strictement croissante, on peut conclure que :
  $\log(a) < \log(b)$ revient à dire que $a < b$
- d'une part : $10^{\log(ab)} = ab$ par définition de la fonction ***log***.
  d'autre part : $10^{\log(a)+\log(b)} = 10^{\log(a)} \times 10^{\log(b)} = a\times b = ab$.
  Autrement dit : $10^{\log(ab)} = 10^{\log(a)+\log(b)}$ ce qui revient à $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- la 3ème propriété sera admise…

II. Résoudre des (in-)équations du type $a^x = b$ ou $a^x < b$

EXERCICE TYPE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a. $1{,}2^x = 0{,}8$ ***b.*** $3 \times 4^x = 7$ ***c.*** $0{,}7^x < 0{,}5$ ***d.*** $1{,}3^x \geq 50\,000$ ***e.*** $1\,500 \times (0{,}83)^x > 500$

Méthode Pour résoudre ce type d'équations et inéquations, on utilise la fonction ***log*** et ses propriétés ci-dessus décrites…

$a^x < b$

$\log(a^x) < \log(b)$ car la fonction ***log*** est strictement croissante.

$x \times \log(a) < \log(b)$ d'après la 3ème propriété ci-dessus

*si **a** < **1**, alors*
***log**(**a**) est négatif,*
donc l'ordre change…

$$x > \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

*si **a** > **1**, alors*
***log**(**a**) est positif,*
donc l'ordre est conservé…

$$x < \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

Solutions

SOLUTIONS

a. $1{,}2^x = 0{,}8$

$\log(1{,}2^x) = \log(0{,}8)$

$x \times \log(1{,}2) = \log(0{,}8)$

$$x = \frac{\log(0{,}8)}{\log(1{,}2)} \approx -1{,}22$$

b. $3 \times 4^x = 7$

$4^x = \frac{7}{3}$

$\boldsymbol{log}(4^x) = \boldsymbol{log}(\frac{7}{3})$

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(4) = \boldsymbol{log}(\frac{7}{3})$

$\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{log}(\frac{7}{3})}{\boldsymbol{log}(4)} \approx 0{,}61$

c. $0{,}7^x < 0{,}5$

$\boldsymbol{log}(0{,}7^x) < \boldsymbol{log}(0{,}5)$

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(0{,}7) < \boldsymbol{log}(0{,}5)$

Pour résoudre cette inéquation, il nous faut diviser par ***log***(0,7).

Comme $0{,}7 < 1$, ***log***(0,7) est négatif et donc l'ordre change de sens.

D'où : $\boldsymbol{x} > \dfrac{\boldsymbol{log}(0{,}5)}{\boldsymbol{log}(0{,}7)}$

soit : $\boldsymbol{x} > 1{,}9$

d. $1{,}3^x \geq 50\ 000$

$\boldsymbol{log}(1{,}3^x) \geq \boldsymbol{log}(50\ 000)$

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(1{,}3) \geq \boldsymbol{log}(50\ 000)$

Pour résoudre cette inéquation, il nous faut diviser par ***log***(1,3).

Comme $1{,}3 > 1$, ***log***(1,3) est positif et donc l'ordre est conservé.

D'où : $\boldsymbol{x} \geq \dfrac{\boldsymbol{log}(50\ 000)}{\boldsymbol{log}(1{,}3)}$

soit : $\boldsymbol{x} \geq 41{,}2$

e. $1\ 500 \times 0{,}83^x > 500$

$0{,}83^x > \dfrac{500}{1\ 500}$

$\boldsymbol{log}(0{,}83^x) \geq \boldsymbol{log}(\frac{500}{1\ 500})$

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{log}(0{,}83) \geq \boldsymbol{log}(\frac{500}{1\ 500})$

Pour résoudre cette inéquation, il nous faut diviser par ***log***(0,83).

Comme $0{,}83 < 1$, ***log***(0,83) est négatif et donc l'ordre change de sens.

D'où : $\boldsymbol{x} \leq \dfrac{\boldsymbol{log}(\frac{500}{1\ 500})}{\boldsymbol{log}(0{,}83)}$ soit : $\boldsymbol{x} \leq 6{,}75$