GENERALITES SUR LES SUITES

I. Suites numériques : vocabulaire et définitions :

1) Définition :

Une suite numérique u est une fonction définie de IN dans IR, qui, à tout entier naturel n, associe son image u(n).

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

Pour simplifier l'écriture, on a choisi de noter u_n (se lit "u indice n") à la place de u(n).

2) Remarques :

Quand une suite est définie sur IN, le premier entier ayant une image par u est *n = 0*.
On dira que le premier terme de la suite est u_0.
u_1 sera alors le *deuxième* terme de la suite, u_2 sera le *troisième* terme de la suite,
u_8 sera le *neuvième* terme de la suite etc…

Quand une suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$, le premier entier ayant une image par u est n = *1.*
On dira que le premier terme de la suite est u_1. **ATTENTION ! Dans ce cas, u_0 n'existe pas !**
u_2 sera alors le *deuxième* terme de la suite, u_3 sera le *troisième* terme de la suite,
u_{12} sera le *douzième* terme de la suite etc…

Dans la phrase "u_9 est le dixième terme de la suite, on a $u_9 = 20$",
9 est l'*indice* du terme
10 est le *rang* du terme, la position du terme dans la suite
20 est la *valeur* du terme u_9

Exemple : Soit (u_n) une suite définie sur IN. Son premier terme vaut 10.

1) Quel est l'indice du premier terme ? *Le premier terme a pour indice n = 0*
2) Quelle égalité peut-on alors écrire ? *$u_0 = 10$*
3) On donne alors les termes suivants : 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24.
   a) Combien vaut u_5 ? *$u_5 = 20$*
   b) Combien vaut le quatrième terme ? *Le quatrième terme vaut 16. $u_3 = 16$*
   c) De quelle terme 22 est-il la valeur ? *22 est la valeur de u_6 , le septième terme.*

3) Vocabulaire et notation :

L'ensemble des termes d'une suite, et par extension, la suite elle-même, est noté (u_n).
Une suite est en général nommée avec les lettres u , v ou w.

Si u_n est un terme de la suite (u_n), le terme précédent se notera u_{n-1} et le terme suivant u_{n+1}.
Par exemple, le terme précédent u_5 est *u_4* et le terme suivant u_5 est *u_6.*
u_4 , u_5 et u_6 sont des termes ***consécutifs*** (des termes qui *se suivent*).

Une suite numérique n'est qu'une suite de nombres qui ont un lien entre eux et qui sont rangés dans un ordre précis.

Exemple : On donne les 4 premiers termes d'une suite (u_n).

2 ; 6 ; 18 ; 54

1) Trouver le lien qui existe entre eux. *On passe d'un terme à l'autre en multipliant par 3.*
2) Donner le cinquième et le huitième terme.

$54 \times 3 = 162$ *le cinquième terme vaut 162*
$162 \times 3 = 486$ *le sixième terme vaut 486*
$486 \times 3 = 1458$ *le septième terme vaut 1458*
$1458 \times 3 = 4374$ *le huitième terme vaut 4374*

II. Mode de génération d'une suite :

La plupart des suites ne sont pas définies par la donnée de leurs premiers termes…

1) Suite définie par une formule explicite:

Une suite (u_n) sera définie de manière explicite si il existe une fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

Exemple : (u_n) est la suite définie sur IN par $u_n = 3n - 2$.
Cela signifie que $f(n) = 3n - 2$.
Si on veut calculer u_5, il suffit de calculer *$f(5)$.*
Et $f(5) = 3 \times 5 - 2 = 15 - 2 = 13$ donc $u_5 = 13$.

Avantage de ce type de définition :
On peut calculer n'importe quel terme, sans forcément connaitre les précédents !

2) Suite définie par une formule de récurrence :

Une suite (u_n) sera définie par récurrence si on donne son premier terme et une relation permettant de calculer le terme suivant à partir du ou des termes précédents.

Exemple : (u_n) est la suite définie sur IN par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.

Cela signifie que pour calculer un terme, il faut *prendre le terme précédent, le multiplier par 2 et rajouter 5.*

Si on veut calculer u_1, il suffit de calculer $2 \times u_0 + 5$. *donc* $u_1 = 2 \times 3 + 5 = 11$.

Si on veut calculer u_2, il suffit de calculer $2 \times u_1 + 5$. *donc* $u_2 = 2 \times 11 + 5 = 27$.

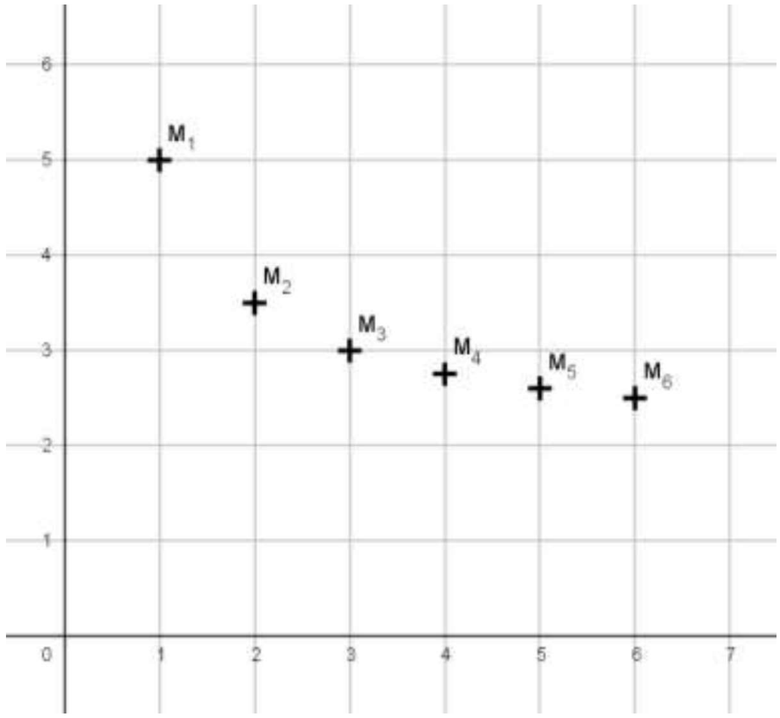
Inconvénient de ce type de définition :
Quand on veut calculer un terme, il faut forcément connaitre les précédents !

III. Représentation graphique d'une suite :

Dans un repère du plan, on représente une suite en plaçant les points M_n de coordonnées (n ; u_n).
On obtient alors une représentation graphique appellée nuage de points.

Exemple : Dans le repère orthonormé ci-dessous, représenter les six premiers termes de la suite (u_n)

définie pour tout entier n par : $u_n = \frac{3}{n} + 2$.



Points :

- $M_1 = (1, 5)$
- $M_2 = (2, 3.5)$
- $M_3 = (3, 3)$
- $M_4 = (4, 2.75)$
- $M_5 = (5, 2.6)$
- $M_6 = (6, 2.5)$

IV. Sens de variation d'une suite:

1) Définitions:

Une suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n.
Une suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n.

2) Conséquence:

Une suite (u_n) sera croissante si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n.
Une suite (u_n) sera décroissante si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n.

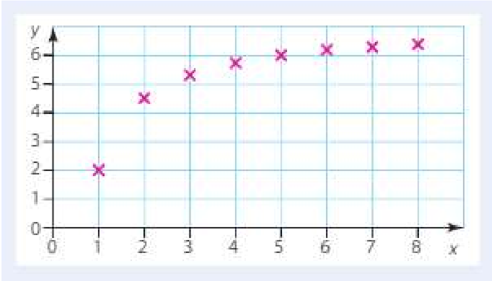
3) Méthodes pour donner le sens de variations d'une suite :

- Graphiquement :
  On ne peut qu'énoncer une conjecture lorsque l'on voit la représentation graphique d'une suite.

- Par le calcul :
  Pour démontrer que $u_{n+1} < u_n$ ou que $u_{n+1} > u_n$, on va calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe. Pour ce faire, il faudra résoudre l'inéquation $u_{n+1} - u_n > 0$ ou étudier directement le signe de $u_{n+1} - u_n$ (si celui-ci est simple).

Exemples :

1) A partir du graphique, que peut-on conjecturer du sens de variation de la suite (u_n) ?



Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$.

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n+1)\times n-(2n-1)\times(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n^2+n-2n^2-2n+n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

Pour étudier le signe d'un quotient, on étudie le signe du numérateur puis celui du dénominateur.

n est un entier naturel non nul donc il est strictement positif.

Donc n(n+1) sera positif. 1 est positif.

Le quotient est donc le quotient d'un nombre positif par un nombre positif, il est donc positif.

Conclusion: $u_{n+1} - u_n > 0$ *donc* $u_{n+1} > u_n$ *donc la suite (u_n) est croissante.*

V. Utilisation de la calculette :

La calculette peut calculer les termes d'une suite et représenter le nuage de points.

Exemple : Déterminer les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

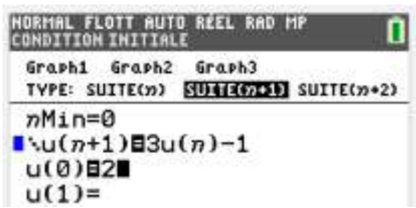
Se mettre en mode suite : MODE puis SUITE (sur la 4è ligne)

Dans le menu *f*(*x*) sélectionner SUITE(n+1)

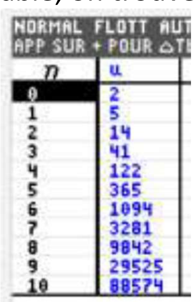
nMin (contient la valeur du premier indice n) mettre 0

u(*n*+1)=3×u(*n*) –1 u avec la touche 2nde 7 et *n* avec la touche *x*,T,θ,n

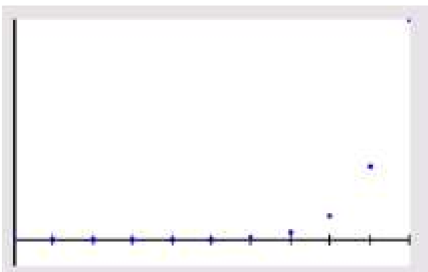
u(0)=2 puis ENTRER



Dans la table, on trouve les valeurs de tous les termes et dans graphe on voit le nuage de points.



n	u
0	2
1	5
2	14
3	41
4	122
5	365
6	1094
7	3281
8	9842
9	29525
10	88574



Chapitre 5 SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

I. Suites arithmétiques :

1) Exemple :

On donne la suite de nombres : -8 ; -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; 7.
Trouver comment passer d'un terme au terme suivant.

On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3.

On dira que cette suite est arithmétique de raison $r = 3$.

2) Définition :

Une suite est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre . Ce nombre est appelé la raison de la suite et il est noté r .

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \quad \cdots\cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Si (u_n) est une suite arithmétique alors $u_{n+1} = u_n + r$.

3) Propriété :

La suite (u_n) sera arithmétique si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemple : On donne la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 5$. Cette suite est-elle arithmétique ?

1) Calculer u_{n+1}.
   $u_{n+1} = 2(n + 1) + 5 = 2n + 2 + 5 = 2n + 8$.

2) Calculer $u_{n+1} - u_n$
   $u_{n+1} - u_n = 2n + 8 - (2n + 5) = 2n + 8 - 2n - 5 = 3$

3) Conclure.
   $u_{n+1} - u_n = 3$ donc $u_{n+1} = u_n + 3$
   On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3 donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

4) Sens de variation :

Exemple : 1) On donne la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 3$ et $u_0 = -1$. Calculer les trois premiers termes.
$u_0 = -1$; $u_1 = u_0 + 3 = -1 + 3 = 2$; $u_2 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$
La valeur des termes augmente car on ajoute 3 à chaque fois, la suite est croissante.

2) On donne la suite définie par $v_{n+1} = v_n - 5$ et $v_0 = 2$. Calculer les trois premiers termes.
$v_0 = 2$; $v_1 = v_0 - 5 = 2 - 5 = -3$; $v_2 = v_1 - 5 = -3 - 5 = -8$
La valeur des termes diminue car on ajoute -5 à chaque fois, la suite est décroissante.

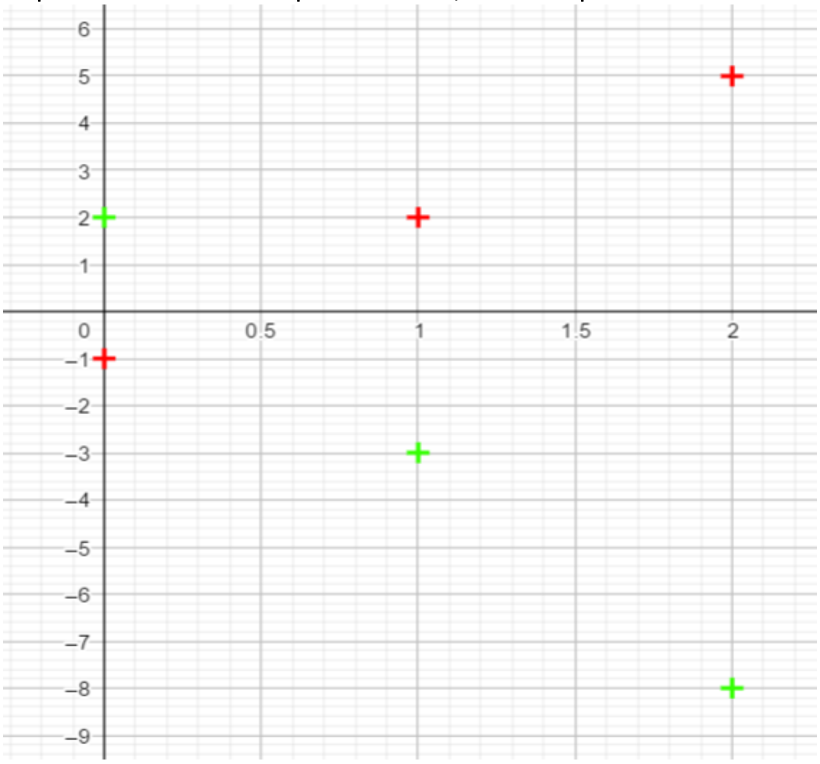
Conclusion : Si r est positive la suite arithmétique est strictement croissante.

Si r est négative la suite arithmétique est strictement décroissante.

Si r est nulle la suite arithmétique est constante.

5) Représentation graphique :

Représenter dans le repère suivant, les trois premiers termes des deux suites précédentes :



En rouge, la suite (u_n)
et en vert (v_n)

II. Suites géométriques :

1) Exemple :

On donne la suite de nombres : -8 ; -4 ; -2 ; -1 ; $-0{,}5$; $-0{,}25$.
Trouver comment passer d'un terme au terme suivant.

On passe d'un terme au suivant en multipliant par $\frac{1}{2}$.

On dira que cette suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

2) Définition :

Une suite est géométrique si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre . Ce nombre est appelé la raison de la suite et il est noté q .

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \quad \cdots\cdots \quad u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Si (u_n) est une suite géométrique alors $u_{n+1} = u_n \times q$.

3) Propriété :

La suite (u_n) sera géométrique si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n.

Exemple : On donne la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$. Cette suite est-elle arithmétique ?

1) Calculer u_{n+1}.

$u_{n+1} = 2^{n+1}$

2) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2$$

3) Conclure.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ donc $u_{n+1} = 2\,u_n$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2
donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 2^0 = 1$.

4) Sens de variation :

Exemple : 1) On donne la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = 2$. Calculer les trois premiers termes.

$u_0 = 2$; $u_1 = 3\ u_0 = 3 \times 2 = 6$; $u_2 = 3\ u_1 = 3 \times 6 = 18$

La suite (u_n) semble croissante.

2) On donne la suite définie par $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ et $v_0 = 2$. Calculer les trois premiers termes.

$v_0 = 2$; $v_1 = \frac{1}{2} \times v_0 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$; $v_2 = \frac{1}{2} \times v_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

La suite (v_n) semble décroissante.

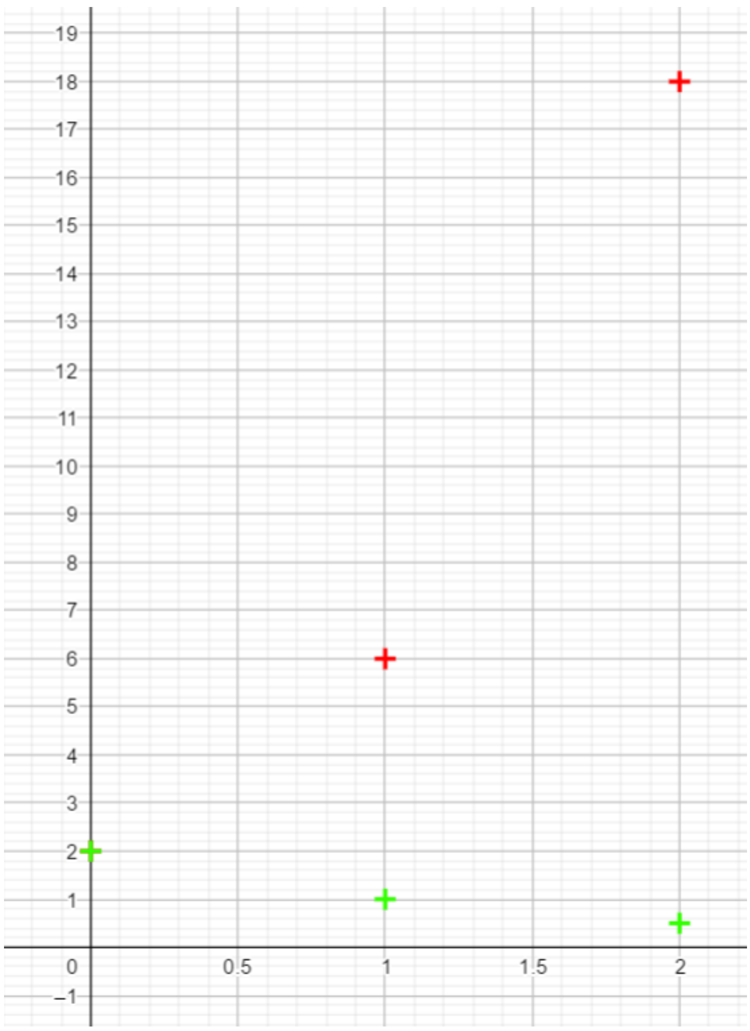
Conclusion : Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ la suite géométrique est strictement croissante.

Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ la suite géométrique est strictement décroissante.

Si $u_0 > 0$ et $q = 1$ la suite géométrique est constante.

5) Représentation graphique :

Représenter dans le repère suivant, les trois premiers termes des deux suites précédentes :



En rouge, la suite (u_n)
et en vert (v_n)

Conclusion : Si une suite est géométrique, les points ne sont pas alignés.